الوحدة02 :المتتاليات العددية

الكفاءات القاعدية

- معرفة مفهوم المتتالية العددية
- تحديد إتجاه تغير متتالية عددية
- التعرف على متتالية حسابية أو متتالية هندسية
-معرفة واستعمال خاصة ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية أو من متتالية هندسية
-معرفة واستعمال الوسط الحسابي والوسط الهندسي
-حساب مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أو من متتالية هندسية
-تحديد إتجاه تغير متتالية حسابية أو متتالية هندسية
-دراسة وضعيات يؤول حلها إلى دراسة متتالية حسابية أو متتالية هندسية

تصميم الدرس

انشطة

1/ عموميات حول المتتاليات العددية:

2/ المتتالية الحسابية:

3/ المتتاليات الهندسية

تمارين ومشكلات حول الوحدة 2

حلول التمارين والمشكلات حول الوحدة 2

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أنشطة

النشاط 01 : مفهوم المتتالية العددية

- **المعطيات والأسئلة :**

إلتقط شخص درجات الحرارة في مكان ما وذلك يوميا وخلال سبعة أيام متتابعة فكانت المشاهدات، مرتبة من اليسار إلى اليمين حسب ترتيب إلتقاطها، كما يلي: 15°، 16 ,5°، 14°، 14,5°، 17°، 18°، 20,5% .

نعتبر، ضمنيا، أن وحدة قياس الحرارة هي الدرجة المئوية، ونرمز بالرموز $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ إلى الأعداد التي تعبر على درجات الحرارة الملتقطة في الأيام: السابع، السادس، الخامس، الرابع، الثالث، الثاني، الأول على الترتيب.

1) أكمل الجدول التالي:

n	1	2	3	4	5	6	7
T_n							

2) الجدول السابق يعرف دالة عددية f : ما هي مجموعة تعريف الدالة f ؟ من بين مجموعات الأعداد القاعدية، ما هي أصغر مجموعة تحتوي مجموعة تعريف الدالة f ؟

- **الأجوبة والملاحظات:**

1) يكمل الجدول كما يلي:

n	1	2	3	4	5	6	7
T_n	20,5	18	17	14,5	14	16,5	15

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2) الجدول السابق يعرف الدالة f التي مجموعة تعريفها D بحيث: $D=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ والتي ترفق بكل عدد n ينتمي إلى D العدد $f(n)$ بحيث: $f(n)=T_n$ وأصغر مجموعات الأعداد القاعدية التي تحتوي D هي N، مجموعة الأعداد الطبيعية.

¶ ملاحظة :

حدسيا، عندما نفكر " الأعداد $T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6,T_7$ على التوالي من اليسار إلى اليمين" نفكر كذلك "متتالية من الأعداد الحقيقية" والجدول السابق الذي يعبر على هذا التفكير الحدسي يعرف كائنا رياضياتيا وهو دالة عددية مجموعة تعريفها مجموعة جزئية من المجموعة N، مجموعة الأعداد الطبيعية.

النشاط 02 : متتالية تراجعية، ترميز

- **المعطيات والأسئلة:**

f دالة عددية، مجموعة تعريفها N، تحقق الشرطين التاليين:

صورة 0 بالدالة f هي (-3).....(1)

وصورة عدد طبيعي غير معدوم p بالدالة f تساوي (مربع الصورة بالدالة f للعدد الطبيعي الذي سبق p) .....(2)

1) أحسب الصورة بالدالة f لكل واحد من العدد 1 و2.

2) عبر عن الشرطين (1) و(2) باستعمال الترميز الخاص بالدوال

3) هل الشرطين (1) و(2) يمكنان من حساب صورة أي عدد طبيعي بالدالة f ؟

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- **الأجوبة والملاحظات:**

1) صورة 1 بالدالة f هي (مربع الصورة بالدالة f للعدد الطبيعي الذي يسبق 1) وهي $(-3)^2$ وهي 9، صورة 2 بالدالة f هي (مربع الصورة بالدالة f للعدد الطبيعي الذي يسبق 2) وهي $(9)^2$ وهي 81.

2) باستعمال الرموز: $f(0)=-3$ ومن أجل p في N^* :
$f(p)=(f(p-1))$ ، أو: $f(0)=-3$ ومن أجل n في N :
$f(n+1)=(f(n))^2$

3) مثلما حسبنا $f(1)$ و $f(2)$ يمكن حساب $f(3)$ و $f(4)$ وصورة أي عدد طبيعي بالدالة f ولكن لحساب $f(100)$ ، مثلا، يجب أن نحسب الصور بالدالة لجميع الاعداد الطبيعية من 1 إلى 99 قبل ذلك.

¶ ملاحظة :

إذا كتبنا U_n بدلا من $f(n)$ ن الشرطان (1) و(2) يصبحان:
$U_0=-3$ ومن أجل n في N : $U_{n+1}=U^2{}_n$

وهذان الشرطان يعرفان متتالية عددية يرمز إليها بالرمز U أو بالرمز (U_n) أو بالرمز $(U_n)_{n\in N}$ و"صورة بالدالة f" تسمى " حدا من حدود المتتالية (U_n)"

النشاط 03 : مفهوم المتتالية الحسابية

- **المعطيات والأسئلة:**

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

المستوي حيث وحدة الطول هي $1cm$ ووحدة المساحة $1cm^2$منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0,I,J)$ نسمي $(x'x)$حامل محور الفواصل و(D) المستقيم ذو المعادلة المبسطة $y=2x$.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نسمي A_n النقطة من $(x'x)$ التي فاصلتها n، ونسمي B_n النقطة من (D) التي فاصلتها n (لنا إذن: $A_n(n,0)$ و$B_n(n,2n)$)

1) أنشئ شكلا تبرز فيه النقط $A_1,A_2,A_3,A_4,B_1,B_2,B_3,B_4$

2) نسمي S_0 مساحة المثلث $0A_1B_1$، S_1 مساحة شبه المنحرف $A_1A_2B_2B_1$، S_2 مساحة شبه المنحرف $A_2A_3B_3B_2$، ومن أجل كل عنصر n من N^* نسمي S_n مساحة شبه المنحرف $A_nA_{n+1}B_{n+1}B_n$

أ. أكمل المساويات التالية: $S_0=.....$، $S_1-S_0=.....$، $S_2-S_1=.....$، $S_{n+1}-S_n=.....$

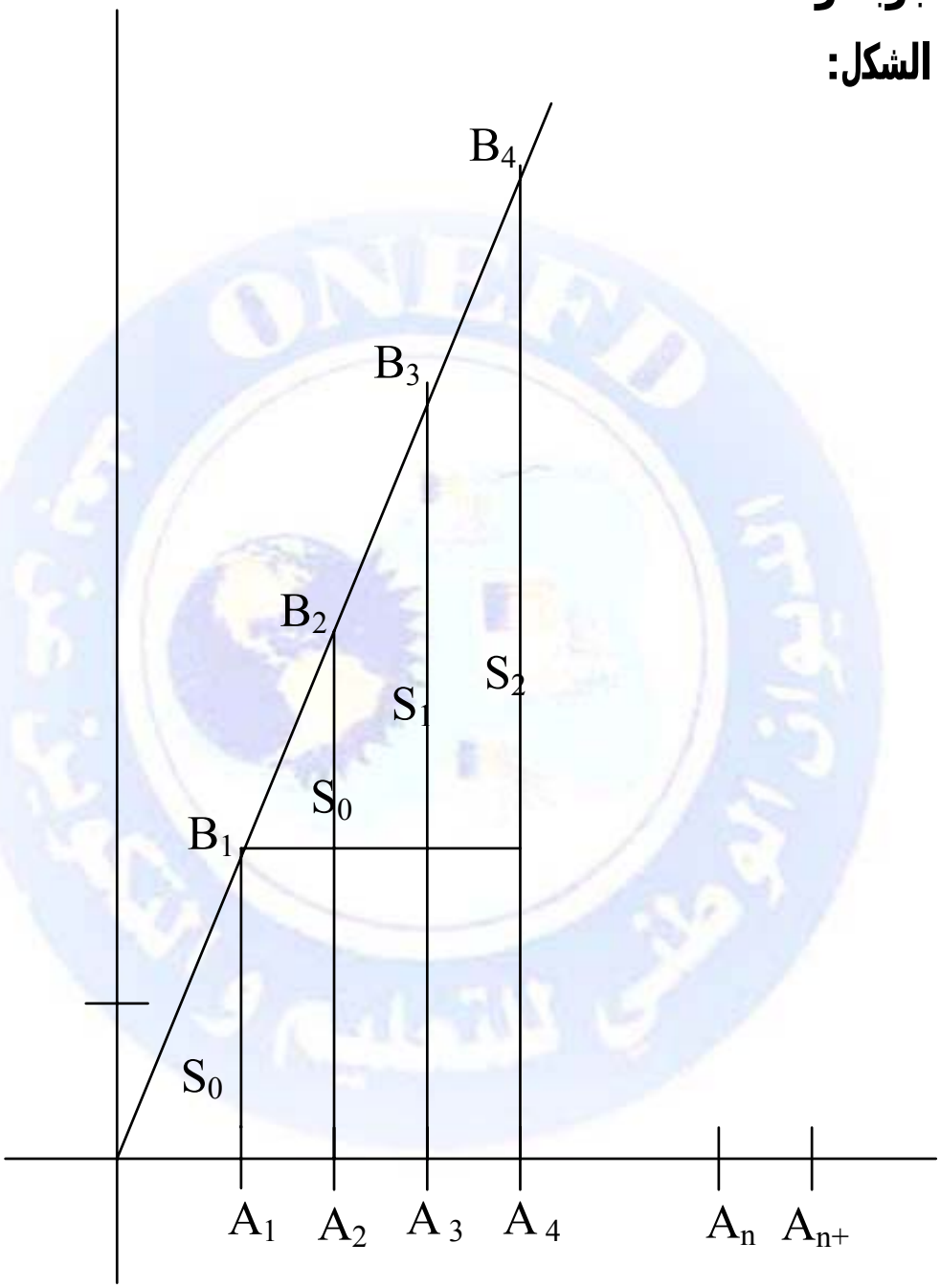
ب. أحسب S_n بدلالة العدد الطبيعي n

ت. أحسب بدلالة العدد الطبيعي n مساحة المثلث $0A_{n+1}B_{n+1}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- **الأجوبة والملاحظات:**

1 **الشكل:**



1 مساحة المستطيل $A_1A_2C_1B_1$ هي 1×2 وهي 2 ومساحة المثلث $0A_1B_1$ هي نصف مساحة المستطيل $A_1A_2C_1B_1$ منه $S_0=1$ ، $S_1-S_0=2$ ، $S_2-S_1=2$ ، $S_{n+1}-S_n=2$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- نعلم أنه: مساحة مثلث تساوي:

$$\frac{\text{(طول ضلع)x (الارتفاع المتعلق بالضلع)}}{2}$$

- ومساحة شبه منحرف تساوي:

$$\frac{\text{(طول القاعدة الكبيرة + طول القاعدة الصغيرة)x الارتفاع}}{2}$$

ب. لما $n \neq 0$ هي مساحة شبه المنحرف $A_n A_{n+1} B_{n+1} B_n$ منه:

$$S_n = \frac{1 \times \left(A_n B_n + A_{n+1} B_{n+1}\right)}{2}$$

$$= \frac{2n + 2(n+1)}{2}$$

$$S_n = 2n + 1$$

ولدينا $S_0 = 1$ منه $S_0 = 2 \times 0 + 1$

منه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 2n + 1$

جـ. مساحة المثلث $0A_{n+1}B_{n+1}$ تساوي $\frac{A_{n+1}B_{n+1} \times 0A_{n+1}}{2}$

تساوي $\frac{2(n+1) \times (n+1)}{2}$

منه مساحة المثلث $0A_{n+1}B_{n+1}$ تساوي $(n+1)^2$

¶ ملاحظات:

- المتتالية العددية (S_n) تحقق:" من أجل كل عدد طبيعي n : $S_{n+1} = S_n + 2$ " لذا نقول أن المتتالية (S_n) متتالية حسابية >ات الأساس 2

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- نلاحظ أنه مهما تكن قيمة n في $S_n = 2n + S_0 : N$
- مساحة المثلث $0A_{n+1}B_{n+1}$ هي المجموع $S_0 + S_1 + S_2 + ... + S_n$

منه $S_0 + S_1 + S_2 + ... + S_n = (n+1)^2$

لاحظ أن عدد حدود المجموع في الطرف الأول هو $(n+1)$

وأن $S_0 + S_1 + S_2 + ... + S_n = \frac{(S_0 + S_1)(n+1)}{2}$

النشاط 04: مفهوم المتتالية الهندسية

- **المعطيات والأسئلة:**

في أول جانفي 1990 كان سعر نوع من الأجهزة المنزلية $30000DA$ وتطور التكنولوجيا يجعل هذا السعر ينقص في كل سنة بنسبة قدرها 2%، مع العلم أن تغيير السعر يتم في أول جانفي من كل سنة فقط!!

1) ما هو العدد الذي يضرب سعر هذا النوع من الأجهزة في كل سنة؟

2) كم كان سعر عذا النوع من الأجهزة في 1991/01/01؟ في 1994/01/01؟

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n، سعر هذا النوع من الأجهزة في $(1990+n)/01/01$

4) باستعمال "محاولات" وآلة حاسبة علمية أجب على السؤوال التالي: إبتداءا من أول جانفي من أي سنة يصبح سعر هذا النوع من الأجهزة أقل من $15000DA$

- **الأجوبة والملاحظات:**

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

1) حسب النتائج حول التطور النسبي، في كل سنة يضرب السعر في $\left(1-\frac{2}{100}\right)$ وإذن في كل سنة، يضرب السعر في العدد 0,98 .

2) باعتبار الأسعار مقدرة بالدنانير:

في 1991/01/01 كان سعر هذا النوع من الأجهزة $30000\times(0,98)$

في1992/01/01 كان سعر هذا النوع من الأجهزة $(30000\times 0,98)\times(0,98)$

في1993/01/01 كان سعر هذا النوع من الأجهزة

$(30000\times 0,98\times 0,98)\times(0,98)$

في1994/01/01

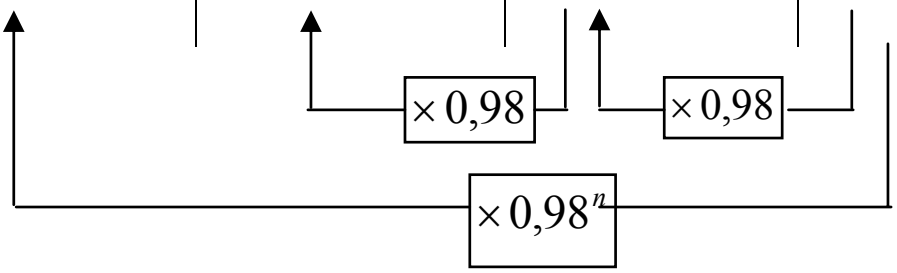
كان سعر هذا النوع من الأجهزة $(30000\times 0,98\times 0,98\times 0,98)\times(0,98)$

منه في 1991/01/01 كان سعر هذا النوع من الأجهزة $29400DA$

وفي 1994/01/01 كان هذا السعر $27671,0448DA$

يمكن إعتبار المخطط التالي:

في أول جانفي من السنة	$(1990+0)$	$(1990+1)$	$(1990+2)$	$(1990+n)$.....
السعر بالدنانير	30000	$30000\times(0,98)^1$	$30000\times(0,98)^2$	$30000\times(0,98)^n$..



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

نظريا: من أجل كل عدد طبيعي n، في 01/01/ سعر هذا النوع من الأجهزة، مقدر بالدنانير هو: $30000\times(0,98^n)$

4 لحساب $30000\times(0,98)^{10}$، مثلا، باستعمال حاسبة علمية البرنامج (من اليسار إلى اليمين) كما يلي:

3	×	1	0	^	4	×	0	.	9	8	^	1	0	=

(قد تكون في حاسبتك اللمسة X^y أو Y^x بدلا من ^ اللمسة لحساب القوى)

محاولات:

$30000\times(0,98^{10})=24512,18421$

$30000\times(0,98^{20})=20028,23915$

$30000\times(0,98^{30})=16364,52958$

$30000\times(0,98^{35})=14792,23862$

إذن ابتداءا من $(1990+35)$/01/01 أي ابتداءا من 2025/01/01 سيكون سعر هذا النوع من الأجهزة أقل من $15000DA$

¶ ملاحظة:

إذا سمينا ϑ_n السعر، المقدر بالدنانير، لهذا النوع من الأجهزة في $(1990+n)$/01/01 وهذا من أجل كل عدد طبيعي n نكون عرفنا متتالية عددية (ϑ_n) تحقق ما يلي:

مهما يكن العدد الطبيعي n، $\vartheta_{n+1}=0,98\times\vartheta_n$ لذا نقول أن المتتالية (ϑ_n) هي متتالية هندسية ذات الأساس 0,98 ولدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $\vartheta_n=30000\times(0,98^n)$ أي $\vartheta_n=\vartheta_0\times(0,98^n)$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

النشاط 05:

- **الأسئلة:**

عين عدد عناصر كل واحدة من المجموعات E,F,G,H التالية:

$G=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ ، $F=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ، $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

H مجموعة جميع الأعداد الطبيعية x التي تحقق $16\le x\le 51$

- **الأجوبة والملاحظات :**

. بالعد المباشر: عدد عناصر E هو 7 وعدد عناصر F هو 9 وعدد عناصر G هو 10

. لتعيين عدد عناصر H :

نعلم أنه عندما نعد، نبدأ بـ " الواحد" ويمكن تنظيم العمل كما يلي:

منه عدد عناصر H هو 36

¶ ملاحظة:

المجموعة	هي مجموعة جميع الأعداد الطبيعية	عدد عناصرها	ملاحظة
E	من 1 إلى 7	7	7=7-1+1
F	من 0 إلى 8	9	9=8-0+1

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

G	من 2 إلى 11	10	10=11-2+1
H	من 16 إلى 51	36	36=51-16+1

ويبرهن أنه إذا كان κ و p عددين طبيعيين، بحيث $p \geq \kappa$ فإن عدد الأعداد الطبيعية من κ إلى p هو $p-k+1$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

1/ عموميات حول المتتاليات العددية:

أ. تعريف، اصطلاحات:

تعريف

نسمي متتالية عددية كل دالة عددية مجموعة تعريفها مجموعة جزئية من المجموعة N، مجموعة الأعداد الطبيعية.

- **اصطلاحات :**

إذا كانت U متتالية عددية مجموعة تعريفها D $(D \subset N)$:

- من أجل كل عنصر p من المجموعة D،

* يرمز بالرمز U_p إلى صورة p بالدالة U، بدلا من $U(p)$ و U_p يقرأ "U دليل p"

* العدد الحقيق U_p يسمى الحد ذو الدليل p للمتتالية U

- يرمز كذلك، للمتتالية U بالرمز (U_n) أو بالرمز $(U_n)_{n \in D}$

- " عبارة U_n بدلالة المتغير n في D "، تسمى " عبارة الحد العام للمتتالية (U_n)"

- إذا كانت المجموعة D مشكلة من أعداد طبيعية متتابعة وكان α العنصر الأصغر من D

* العدد الحقيق U_α يسمى الحد الأول للمتتالية (U_n)

* من أجل p عنصر من D، إذا كان $(p-1)$ ينتمي إلى D، U_{p-1} يسمى الحد الذي يسبق "U_p" وإذا كان $(p+1)$ ينتمي إلى D، U_{p+1} يسمى الحد الذي يلي "U_p"

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أمثلة:

1) لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة على N بحدها العام $U_n = \frac{1}{n^2+2}$

* العنصر الأصغر للمجموعة N هو 0 منه الحد الأول للمتتالية (U_n) هو U_0 وهو $\frac{1}{0^2+2}$ منه الحد الأول للمتتالية (U_n) هو $\frac{1}{2}$.

* الحد ذو الدليل 4 للمتتالية (U_n) هو U_4 وهو $\frac{1}{4^2+2}$ منه $U_4 = \frac{1}{18}$

2) القائمة من الأعداد $-\frac{5}{2}, \frac{3}{5}, -\sqrt{2}, 1{,}5$، مذكورة في الترتيب من اليسار إلى اليمين تعين متتالية عددية (ϑ_n) مجموعة تعريفها $\{1;2;3;4\}$، مثلا، وبحيث $\vartheta_1 = -\frac{5}{2}, \vartheta_2 = \frac{3}{5}; \vartheta_3 = -\sqrt{2}; \vartheta_4 = 1{,}5$ والحد الأول للمتتالية (ϑ_n) هو ϑ_1

3) لتكن (W_n) المتتالية العددية المعرفة على N^* بما يلي:

$W_1 = -1$ ومهما يكن العنصر n من N^* : $W_{n+1} = 3W_n^{\,2} + 5$.....(1)

* العنصر الأصغر للمجموعة N^* هو1 إذن الحد الأول للمتتالية هو $W_1 = -1$

* العلاقة (1) تعني " كل حد من حدود المتتالية - باستثناء الحد الأول – يساوي (3 مرات مربع الحد السابق له) +5

منه الحد الثاني للمتتالية (W_n) هو W_2 و $W_2 = 3.W_1^{\,2} + 5$. إذن $W_2 = 8$

و W_3 الحد الثالث للمتتالية (W_n) بحيث $W_3 = 3.W_2^{\,2} + 5$. إذن $W_3 = 197$

¶ ملاحظة:

* عند التعامل مع متتالية عددية، يجب التمييز بين الكتابة (U_n) التي تعبر على دالة U والكتابة U_n التي تعبر على صورة بالدالة U.

* من خلال الأمثلة السابقة، لقد سلطت الأضواء على الطرف الأكثر استعمالا لتوليد حدود متتالية عددية إذ:

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة

- في المثال الأول: يمكن تعيين أي حد من حدود المتتالية (U_n) وذلك مباشرة بالاعتماد على عبارة الحد العام.

- في المثال الثاني: جميع حدود المتتالية (ϑ_n) معطاة، عددها منته.

- في المثال الثالث: أعطي الحد الأول للمتتالية (W_n) ومساواة تعطي كل حد W_{n+1}، باستثناء الحد الأول، بدلالة الحد السابق له W_n وفي هذه الحالة لا يمكنك حساب حد، يختلف عن الحد الأول إلا بالرجوع إلى الحد السابق له لذا هذا النوع من المتتاليات تسمى **متتاليات تراجعية.**

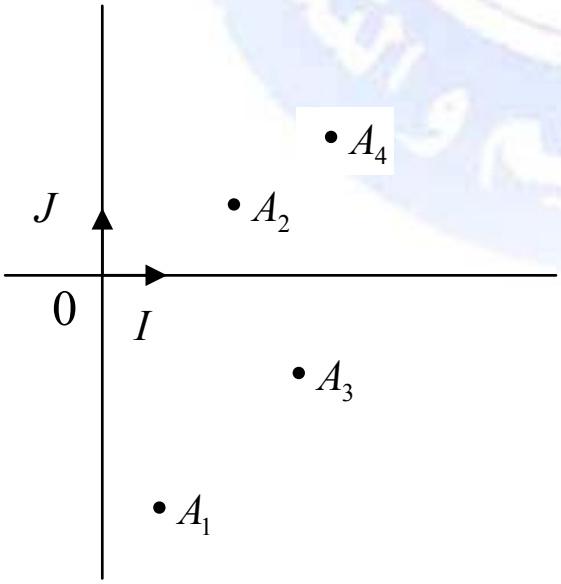
ب. التمثيل البياني لمتتالية عددية:

تعريف :

لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها $D(D \subset N)$
التمثيل البياني للمتتالية العددية (U_n) في المستوي المنسوب إلى معلم $(0,I,J)$ هو مجموعة النقط $M(n,y)$ التي تحقق $[(y=U_n) \wedge (n \ni D)]$

مثال:

التمثيل البياني للمتتالية (ϑ_n) المعرفة في الفقرة السابقة هو مجموعة النقط $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ الموضحة في الشكل المجاور



¶ **ملاحظة:** لا نصل بين هذه النقط!!

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

جـ. اتجاه تغير متتالية عددية:

تعريف :

لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها D مشكلة من أعداد طبيعية متتابعة.

* نقول عن المتتالية (U_n) أنها متزايدة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عنصر n من D يحقق $(n+1)\ni D$ يكون: $U_{n+1}\geq U_n$

* نقول عن المتتالية (U_n) أنها متناقصة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عنصر n من D يحقق $(n+1)\ni D$ يكون: $U_{n+1}\leq U_n$

* نقول عن المتتالية (U_n) أنها ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عنصر n من D يحقق $(n+1)\ni D$ يكون: $U_{n+1}=U_n$

أمثلة:

1) لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة على N، بحدها العام $U_n=n-\frac{1}{n+1}$ من أجل n عنصر من N لكي نقارن U_n و U_{n+1} ندرس إشارة $(U_{n+1}-U_n)$

لنا: $U_{n+1}-U_n=\left(n+1-\frac{1}{(n+1)+1}\right)-\left(n-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=n+1-\frac{1}{n+2}-n+\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$=\frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

منه من أجل كل عنصر n من N : $U_{n+1}-U_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ وبالتالي

$U_{n+1}-U_n>0$ وعليه $U_{n+1}>U_n$ إذن المتتالية (U_n) متزايدة

2 لتكن (T_n) المتتالية العددية المعرفة على N ، بحدها العام $T_n=1-n^2$

من أجل كل عنصر n من N لنا: $T_{n+1}-T_n=\left[1-(n+1)^2\right]-(1-n^2)$

$=(1-(n^2+2n+1))-(1-n^2)$

$=-2n-1$

منه مهما يكن العنصر n من N : $T_{n+1}-T_n<0$ إذن $T_{n+1}<T_n$

وعليه المتتالية (T_n) متناقص

¶ ملاحظة:

لدراسة أتجاه تغير متتالية عددية (U_n) ندرس إشارة الفرق $(U_{n+1}-U_n)$

2/ المتتالية الحسابية:

في هذه الفقرة، جميع المتتاليات المعتبرة هي متتاليات عددية مجموعة تعريف كل واحدة منها مشكلة من أعداد طبيعية متتابعة.

أ. تعريف :

لتكن (U_n) متتالية، من المتتاليات المعتبرة، مجموعة تعريفها D .

نقول عن المتتالية (U_n) أنها متتالية حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي ثابت r بحيث من أجل كل عنصر n من D يحقق $(n+1)\ni D$ يكون:

$U_{n+1}=U_n+r$

جميع الحقوق محفوظة ©

وعندئذ العدد الحقيقي الثابت r يسمى أساس المتتالية الحسابية (U_n)

بعبارة أخرى: متتالية حسابية هي متتالية بحيث نحصل على كل حد، تختلف عن الحد الأول، من حدودها بإضافة إلى الحد السابق لهذا الحد دائما نفس العدد الحقيقي وعندئذ هذا العدد الحقيقي يسمى أساس هذه المتتالية الحسابية.

أمثلة:

1) لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة على المجموعة: $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ بالجدول:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U_n	5	2	-1	-4	-7	-10	-13	-16	-19

المتتالية (U_n) هي متتالية حسابية ذات الأساس (-3) لأننا نحصل على كل حد، يختلف عن الحد الأول، من حدودها بإضافة (-3) إلى الحد السابق لهذا الحد.

2) لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة على N، بحدها العام $\vartheta_n = \frac{n}{2} - 6$

من أجل كل عنصر n من D لدينا:

$$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \left(\frac{n+1}{2} - 6\right) - \left(\frac{n}{2} - 6\right)$$

منه $\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \frac{1}{2}$

منه $\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \frac{1}{2}$ وعليه (ϑ_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

¶ ملاحظة:

إثبات أن متتالية عددية هي متتالية حسابية، نثبت أن الفرق بين حدين متتابعين كيفيين هو **عدد حقيقي ثابت**

ب. إتجاه تغير متتالية حسابية:

من تعاريف سابقة، نستنتج:

مبرهنة:

- تكون متتالية حسابية متزايدة إذا وفقط إذا كان أساسها موجبا.
- تكون متتالية حسابية متناقصة إذا وفقط إذا كان أساسها سالبا.
- تكون متتالية حسابية ثابتة إذا وفقط إذا كان أساسها معدوما.

جـ. عبارة الحد العام لمتتالية حسابية إعتمادا على حدها الأول وأساسها:

لتكن (U_n) متتالية حسابية مجموعة تعريفها D وأساسها العدد الحقيقي الثابت r

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

في حالة الحد الأول للمتتالية (U_n) هو U_0

$U_0 = U_0$

$U_1 = U_0 + r$

$U_2 = U_1 + r$

$U_3 = U_2 + r$

$U_3 = (U_0 + 2.r) + r$

$U_3 = U_0 + 3.r$ منه

ويبرهن أنه من أجل كل عنصر n من D :

$U_n = U_0 + n.r$

في حالة الحد الأول للمتتالية (U_n) هو U_1

$U_1 = U_1$

$U_2 = U_1 + r$

$U_3 = U_2 + r$

$U_3 = (U_1 + r) + r$

$U_3 = U_1 + 2r$

$U_4 = U_3 + r$

$U_4 = (U_1 + 2.r) + r$

$U_4 = U_1 + (4-1)r$ منه

ويبرهن أنه من أجل كل عنصر n من D :

$U_n = U_1 + (n-1)r$

مبرهنة:

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

ليكن (U_n) متتالية حسابية مجموعة تعريفها D وأساسها العدد الحقيقي الثابت r

* **إذا كان الحد الأول للمتتالية الحسابية** (U_n) **هو** U_0: من أجل كل عنصر n من D : $U_n = U_0 + n.r$

* **إذا كان الحد الأول للمتتالية الحسابية** (U_n) **هو** U_1**:** من أجل كل عنصر n من D : $U_n = U_1 + (n-1)r$

أمثلة:

1) لتكن (U_n) المتتالية الحسابية، المعرفة على N^*، التي حدها الأول $U_1 = -5$ وأساسها $r = -8$

مهما تكن قيمة n في N^* : $U_n = U_1 + (n-1)r$ منه $U_n = (-5) + (n-1)(-8)$

إذن: $U_n = -8n + 3$

2) لتكن (ϑ_n) المتتالية الحسابية، المعرفة على N، التي حدها الثاني يساوي 3 وحدها الثالث يساوي 7.

بما أن مجموعة تعريف (ϑ_n) هي N فإن حدها الأول هو ϑ_0 وحدها الثاني هو ϑ_1 وحدها الثالث هو ϑ_2 وإذا سمينا r أساس المتتالية الحسابية (ϑ_n)

لدينا: $\vartheta_2 = \vartheta_1 + r$ أي $7 = 3 + r$ منه $r = 4$

ولدينا كذلك $\vartheta_1 - \vartheta_0 = r$ أي $3 = \vartheta_0 + r$ أي $3 = \vartheta_0 + 4$

منه $\vartheta_0 = -1$ ولنا من أجل كل n في N : $\vartheta_n = \vartheta_0 + n.r$

منه $\vartheta_n = 4n - 1$

¶ ملاحظة:

http://www.onefd.edu.dz

جميع الحقوق محفوظة ©

معرفة الحد الأول والأساس لمتتالية حسابية تضمن معرفة كل حد من حدودها.

د. خاصة ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية:

لتكن a,b,c أعداد حقيقية:

لنا $b=a+(b-a)$ و $c=b+(c-b)$ منه للحصول على b نضيف إلى a العدد $(b-a)$ وللحصول على c نضيف إلى b العدد $(c-b)$ وحتى تكون a,b,c في الترتيب من اليسار إلى اليمين حدودا متتابعة من متتالية حسابية يلزم ويكفي أن يكون $b-a=c-b$

أي أن يكون $2b=a+c$ وهكذا قد برهنا على مبرهنة.

مبرهنة، تعريف:

لتكن a,b,c أعدادا حقيقية،

- حتى تكون a,b,c في الترتيب من اليسار إلى اليمين –حدودا متتابعة من متتالية حسابية، يلزم ويكفي أن يكون $a+c=2b$

- للتعبير على كون " $a+c=2b$" نقول " b هو الوسط الحسابي للعددين a و c".

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مثال:

إذا كانت (U_n) متتالية حسابية، المعرفة على N، وكان $\left\{\begin{array}{l} U_0+U_2=4 \\ \text{و} \\ U_0=7 \end{array}\right.$

يكون U_1 الوسط الحسابي للعددين U_0 وU_2 وبالتالي:

يكون $2U_1=U_0+U_2$ إذن $2U_1=4$ إذن $U_1=2$ وr أساس المتتالية الحسابية (U_n) هو U_1-U_0 إذن $r=2-7$ وعليه $r=-5$ ومن أجل كل عنصر n في N، $U_n=U_0+n.r$ أي $U_n=-5n+7$

هـ- مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ولتكن $U_1;U_2;U_3;.....;U_n$ أعدادا حقيقية.

لنفرض $U_1;U_2;U_3;.....;U_{n-1};U_n$ - في الترتيب من اليسار إلى اليمين حدودا متتابعة من متتالية حسابية ذات الأساس r ولنحسب المجموع S حيث: $U_1+U_2+U_3+.....+U_{n-1}+U_n$

يمكن استعمال الجدول التالي:

قيم a	U_1+r	U_2+r	U_3+r	...	$U_{n-1}+r$	U_n
قيم b	U_n-r	$U_{n-1}-r$	U_{n-2}	...	U_2-r	U_1
قيم $(a+b)$	U_1+U_n	U_1+U_n	U_1+U_n	...	U_1+U_n	U_1+U_n

في السطر الأول من الجدول ننتقل من خانة إلى الموالية بإضافة r

في السطر الثاني من الجدول ننتقل من خانة إلى الموالية بإضافة r -

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

منه قيمة $(a+b)$ لا تتغير.

مجموع قيم a هو S ، مجموع قيم b هو S ، منه مجموع قيم $(a+b)$ هو 25.

منه: $25 = \frac{(U_1+U_n)+(U_1+U_n)+....+(U_1+U_n)}{n \text{ حدا}}$

إذن: $25 = n.(U_1+U_n)$ وبالتالي: $S = \frac{n\times(U_1+U_n)}{2}$

وهكذا برهنا مبرهنة

مبرهنة:

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ولتكن $U_1;U_2;U_3;.....;U_n$ أعدادا حقيقية.

إذا كانت $U_1;U_2;U_3;.....;U_{n-1};U_n$ - في الترتيب من اليسار إلى اليمين حدودا متتابعة من متتالية حسابية لدينا :

$$U_1+U_2+U_3+.....+U_n = \frac{n(U_1+U_n)}{2}$$

¶ ملاحظة:

في الطرف الثاني للمساواة السابقة الذكر n هو عدد حدود المجموع في الطرف الأول، U_1 هو الحد الأول لهذا المجموع و U_n حده الأخير.

جميع الحقوق محفوظة ©

وبعبارات عامة المبرهنة تصبح:

مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية يساوي

$$\frac{\text{(عدد حدود المجموع)x (الحد الأول للمجموع + الحد الأخير للمجموع)}}{2}$$

مثال:

لنحسب المجموع S مجموع جميع الأعداد الطبيعية من 8 إلى 103.

لدينا: $S = 8+9+10+.....+101+102+103$ وهو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها 1

الحد الأول للمجموع S هو 8وحده الأخير هو 103.

عدد حدود المجموع S هو $103-8+1$(أنظر إلى الملاحظة في النشاط 05)

و $103-8+1=96$

وعليه: $S=\frac{(103+8)\times 96}{2}$ منه $S=5328$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

3/ المتتاليات الهندسية

في هذه الفقرة كذلك، جميع المتتاليات المعتبرة هي متتاليات عددية مجموعة تعريف كل واحدة منها مشكلة من أعداد طبيعية متتابعة.

أ. تعريف:

لتكن (U_n) متتالية من المتتاليات المعتبرة، مجموعة تعريفها D،
نقول عن المتتالية (U_n) أنها متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي ثابت q بحيث من أجل كل عنصر n من D، يحقق $(n+1)\in D$ يكون:
$U_{n+1}=q.U_n$ وعندئذ q يسمى أساس للمتتالية الهندسية (U_n).

بعبارات أخرى:

متتالية هندسية هي متتالية بحيث نحصل على كل حد، يختلف عن الحد الأول، من حدودها بضرب الحد السابق لهذا الحد دائما في نفس العدد الحقيق وعندئذ هذا العدد الحقيقي يسمى أساس لهذه المتتالية الهندسية.

أمثلة:

الأعداد $1;3;9;27;81;243$ في الترتيب من اليسار إلى اليمين – هي حدود متتابعة من متتالية هندسية ذات الأساس 3 لأننا نحصل على كل حد يختلف عن الحد الأول، بضرب الحد السابق له في 3.

لتكن (U_n) المتتالية العددية، المعرفة على N بحدها العام $U_n=\frac{5}{2^n}$

من أجل كل عنصر n من N : $U_{n+1}=\frac{5}{2^{n+1}}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

$$= \frac{5}{2^n.2}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2^n}$$
$$= \frac{1}{2}.U_n$$

منه $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$، من أجل كل عنصر n من N

وعليه (U_n) متتالية هندسية ذات الأساس $\frac{1}{2}$

ب. إتجاه تغير متتالية هندسية جميع حدودها موجبة:

لتكن (U_n) متتالية هندسية حدها الأول وأساسها q موجبان تماما جميع حدود هذه المتتالية موجبة تماما لأننا نحصل على كل حد بضرب الحد السابق له في q ونعلم أن جداء أعداد موجبة تماما هو عدد موجب تماما.

ومهما يكن العنصر n من D المحقق لـ $(n+1) \ni D$:

$$U_{n+1} = q.U_n$$
$$U_{n+1} - .U_n = q..U_n - U_n$$
$$U_{n+1} - .U_n = U_n(q-1)$$

- إذا كان $q=1$: $U_{n+1} - .U_n = 0$ منه $U_{n+1} = .U_n$ ومنه (U_n) ثابتة
- إذا كان $1>q>0$: $q-1<0$ و $U_n>0$ و $U_{n+1}-U_n<0$ متناقصة
- إذا كان $q>1$: $q-1>0$ و $U_n>0$ و $U_{n+1}-U_n>0$

منه $U_{n+1} > U_n$ ومنه (U_n) متزايدة

وهكذا لقد برهنت

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

لتكن (U_n)متتالية هندسية حدها الأول وأساسها q موجبان تماما:

- إذا كان $0 < q < 1$ تكون (U_n) متناقصة
- إذا كان $q = 1$ تكون (U_n) ثابتة
- إذا كان $q > 1$ تكون (U_n) متزايدة

جـ. عبارة الحد العام لمتتالية هندسية إعتمادا على حدها الأول وأساسها:

تكن (U_n)متتالية هندسية أساسها q غير معدوم

إذا كان الحد الأول للمتتالية (U_n) هو U_0	إذا كان الحد الأول للمتتالية (U_n) هو U_1
$U_0 = U_0$ منه $U_0 = U_0.q^0$	$U_1 = U_1$ منه $U_1 = U_1.q^{1-1}$
$U_1 = U_0.q$ منه $U_1 = U_0.q^1$	$U_2 = U_1.q$ منه $U_2 = U_1.q^{2-1}$
$U_2 = U_1.q$ منه $U_2 = U_1.q^2$	$U_3 = U_2.q$ منه $U_3 = U_1.q^{3-1}$
ويبرهن أنه من أجل كل عنصر n	ويبرهن أنه من أجل كل عنصر n
من $D\ U_n = U_0.q^n$	من $D\ U_n = U_0.q^{n-1}$

مبرهنة:

تكن (U_n)متتالية هندسية مجموعة تعريفها D وأساسها العدد الحقيقي الثابت غير المعدوم

- **إذا كان الحد الأول للمتتالية الهندسية** (U_n) **هو** U_0**:** من أجل كل عنصر n من $D\ U_n = U_0.q^n$
- **إذا كان الحد الأول للمتتالية الهندسية** (U_n) **هو** U_1**:** من أجل كل عنصر n من $D\ U_n = U_0.q^{n-1}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

مثال:

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة على N بحدها العام $U_n = 2.(-3)^n$

نلاحظ أن U_n من الشكل $U_0.q^n$ حيث $U_0 = 2$ و $q = -3$

منه من أجل كل عنصر n من N، الحد ذو الدليل n للمتتالية (U_n) هو الحد ذو الدليل n لمتتالية هندسية، معرفة على N، حدها الأول 2 وأساسها (-3) منه (U_n) متتالية هندسية ذات الأساس (-3)

¶ ملاحظة :

معرفة الحد الأول والأساس لمتتالية هندسية تضمن معرفة أي حد من حدودها.

د. خاصة ثلاثة حدود (غير معدومة) متتابعة من متتالية هندسية:

لتكن a,b,c أعداد حقيقية غير معدومة

لدينا: $b = a \times \frac{b}{a}$ و $c = b \times \frac{c}{b}$ منه للحصول على b نضرب a في $\frac{b}{a}$

وللحصول على c نضرب b في $\frac{c}{b}$ منه

حتى تكون a,b,c - في الترتيب من اليسار إلى اليمين – حدودا متتابعة من متتالية هندسية، يلزم ويكفي أن يكون $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ أي أن يكون $a.c = b^2$

وهكذا لقد برهنا على مبرهنة

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مبرهنة:

تكن a,b,c أعداد حقيقية غير معدومة،

- حتى تكون الأعداد a,b,c - في الترتيب من اليسار إلى اليمين – حدودا متتابعة من متتالية هندسية، يلزم ويكفي أن يكون $a.c=b^2$

- للتعبير على كون " $a.c=b^2$ " نقول " b وسط هندسي للعددين a و c"

مثال:

إذا كانت (ϑ_n) متتالية هندسية – جميع حدودها موجبة بحيث: $\vartheta_3\times\vartheta_5=49$ ، لدينا ϑ_4 وسط هندسي للعددين ϑ_3 و ϑ_5 منه: $\vartheta_3\times\vartheta_5=\vartheta_4{}^2$

أي $\vartheta_4{}^2=49$ وهذا معناه $\sqrt{\vartheta_4^2}=\sqrt{49}$

أي $|\vartheta_4|=7$ وبما أن $\vartheta_4\geq 0$ فإن $\vartheta_4=7$

هـ- مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوما ولتكن $U_2,U_3,....,U_{n-1},U_n$ أعداد حقيقة لنفرض أن الأعداد $U_1,U_2,U_3,....,U_{n-1},U_n$ - في الترتيب من اليسار إلى اليمين – هي حدود متتابعة من متتالية هندسية ذات الأساس q ولنحسب المجموع S حيث: $S=U_1+U_2+U_3+....+U_{n-1}+U_n$

لنستعمل الجدول:

قيم a	U_1	U_2	U_3	...	U_{n-1}	U_n
قيم $a.q$	U_2	U_3	U_4	...	U_n	$q.U_n$

مجموع قيم a هو S ومجموع قيم $a.q$ هو qS

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

و: (مجموع قيم a) – (مجموع قيم $a.q$) يساوي $U_1 - qU_n$

وبالتالي: $S - q.S = U_1 - qU_n$

أي $S(1-q) = U_1 - qU_n$

إذا كان $q \neq 0$ **:** $U_n = U_1.q^{n-1}$ منه $q.U_n = U_1.q^n$

$S(1-q) = U_1 - qU^n$

إذا كان $q = 0$ **:** جميع حدود S باستثناء ربما U_1 معدومة منه $S(1-q) = S$

و $U_1 - U_1 q^n = U_1$ وعليه $S(1-q) = U_1 - U_1 q^n$

منه في جميع الحالات: $S(1-q) = U_1 - U_1 q^n$

وإذا كان $q \neq 0$ **:** $S = U_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

وهكذا برهنت مبرهنة

مبرهنة:

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ولتكن $U_1, U_2, U_3, ..., U_{n-1}, U_n$ أعداد حقيقية، إذا كانت $U_1, U_2, U_3, ..., U_{n-1}, U_n$ - في الترتيب من اليسار إلى اليمين – حدودا متتابعة من متتالية هندسية ذات الأساس q بحيث $q \neq 0$، لدينا:

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_{n-1} + U_n = U_1 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

بعبارات عامة:

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية، أساسها q لا يساوي 1، يساوي:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$$\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)\times$$ (الحد الأول للمجموع)

مثال:

ليكن S المجموع حيث: $S=1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6$

S مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية ذات الأس 2 عدد حدود S هو7 الحد الأول للمجموع S هو 1 وعليه:

$$S=1\times\frac{1-2^7}{1-2}$$

وبالتالي $S=127$

تمارين ومشكلات حول الوحدة 2

التمارين المسبوقة بالإشارة □ محلولة حلا مفصلا وتسلط الأضواء على طرائق.

حول العموميات:

التمرين 1:

□ (U_n) متتالية عددية، مجموعة تعريفها N، حدها الأول 3 وللحصول على كل حد، يختلف عن الحد الأول، من حدودها: نضرب الحد السابق له في (-2) ونضيف 5 إلى الجداء المحصل عليه.

1) ما هي قيمة U_0؟

2) ما هي عبارة U_{n+1} بدلالة U_n

3) أحسب U_1، U_2، U_3، U_4

http://www.onefd.edu.dz

التمرين 2:

□ (U_n) متتالية عددية، معرفة على N^*، بحدها العام $U_n = n + \frac{1}{n}$

1) أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (U_n)

2) أوضع تخمينا فيما يخص اتجاه تغير المتتالية (U_n)

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) دراسة نظرية.

التمرين 3:

(U_n)، (ϑ_n)، (W_n) متتاليات عددية، كل واحدة منها معرفة على N بحدها العام كما يلي: $W_n = \frac{3n+1}{5n+1}$، $\vartheta_n = \frac{n-2}{2n+3}$، $U_n = n^2 + n$

1) أحسب الحدود الثلاثة الأولى لكل واحدة من المتتاليات (W_n)، (ϑ_n)، (U_n)

2) أدرس اتجاه تغير كل واحدة من المتتاليات (W_n)، (ϑ_n)، (U_n)

حول المتتاليات الحسابية:

التمرين 4:

□ قل عن كل واحدة من المتتاليات العددية (U_n)، (ϑ_n)، (W_n)، المعرفة على N، إن كانت متتالية حسابية أم لا وذلك مع التبرير.

$U_n = \frac{n}{2} - 6$، $\vartheta_n = n^2 + 3n$، $\begin{cases} \vartheta_0 = 7 \\ 5U_{n+1} = 3 - 5U_n \end{cases}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 5:

(U_n)متتالية حسابية، معرفة على N، حدها الأول $\frac{1}{2}$ وأساسها (-2)، (ϑ_n) متتالية حسابية، معرفة على N، حدها الأول (-3) وأساسها $\frac{1}{4}$

1) أعط عبارة الحد العام لكل واحدة من المتتاليتين (U_n) و(ϑ_n)

2) أحسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم n، مجموع n حدا الأولى للمتتالية (U_n) ومجموع n حدا الأولى للمتتالية (ϑ_n).

التمرين 6:

□ (U_n) متتالية حسابية، معرفة على N، بحيث: $U_6 = 5$ و $U_{15} = -40$

1) أوجد أساس المتتالية الحسابية (U_n) وحدها الأول

2) أعط عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية (U_n)

3) هل العدد (-135) حد من حدود المتتالية الحسابية (U_n)؟

4) أحسب مجموع الحدود الخمسة والعشرين الأولى من المتتالية الحسابية (U_n)

5) n عدد طبيعي أكبر من 3،

أحسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = U_3 + U_4 + ... + U_n$

التمرين 7:

□ عين ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن مجموع هذه الحدود يساوي 414 وأن واحد من هذه الحدود يساوي 117.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

حول المتتاليات الهندسية:

التمرين 8:

□ (U_n)، (ϑ_n)، (W_n) متتاليات عددية، معرفة على N بحدودها العامة:

$U_n = 3.5^n$، $\vartheta_n = \frac{7,5^n}{2}$، $W_n = \frac{2}{7^n}$

1) أثبت أن كل واحدة من هذه المتتاليات هي متتالية هندسية.

2) أدرس اتجاه تغير كل واحدة من المتتاليات (U_n)، (ϑ_n)، (W_n)

التمرين 9:

(U_n) متتالية هندسية، معرفة على N، حدها الأول -2 وأساسها 4

(ϑ_n) متتالية هندسية، معرفة على N، حدها الأول $\frac{1}{3}$ وأساسها 5

1) أعط عبارة الحد العام لكل واحدة من المتتاليتين (U_n) و(ϑ_n)

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم،

أحسب بدلالة n، مجموع n حدا الأولى للمتتالية (U_n) ومجموع n حدا الأولى للمتتالية (ϑ_n)

التمرين 10:

(U_n) متتالية هندسية، معرفة على N، وجميع حدودها موجبة وهي بحيث:

$U_3 \times U_5 = 2304$ و $3U_3 - U_4 = 24$

1) أوجد U_4 ثم U_3 ثم q أساس المتتالية الهندسية (U_n)

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2) أعط عبارة الحد العام للمتتالية (U_n)

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n، المجموع S_n حيث:

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{2n+1}$$

التمرين 11:

1) هل يوجد عدد حقيقي x بحيث تكون الأعداد 5-، x، 10 في هذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية؟

2) عين قيمة (أو قيم) العدد الحقيقي α بحيث تكون الأعداد 2، α، $\frac{8}{3}$ في هذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية.

التمرين 12:

ليكن x عددا حقيقيا

1) نفرض $x \neq 1$، أعط عبارة أخرى للمجموع $A(x)$ حيث:

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

2) نفرض $x \neq -1$، أعط عبارة أخرى للمجموع $B(x)$ حيث:

$$B(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9$$

التمرين 13:

في 1989/01/01 كان عدد سكان مدينة A 400000 نسمة وكان عدد سكان مدينة B 350000 نسمة، لوحظ أن عدد سكان المدينة A ينقص بنسبة قدرها 0,5% في كل سنة وان عدد سكان المدينة B يزداد بنسبة قدرها 1%.

من أجل كل عدد طبيعي n، نسمي a_n عدد سكان المدينة A ونسمي b_n عدد سكان المدينة B في $(1989+n)/01/01$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

1) أثبت أن (a_n) و (b_n) متتاليتان هندسيتان

2) أعط عبارة الحد العام لكل واحدة من المتتاليتين (a_n) و (b_n)

3) في أول جانفي من أية سنة يصبح عدد سكان المدينة B أكبر من عدد سكان المدينة A لأول مرة؟

متتاليات حسابية ومتتاليات هندسية:

التمرين 14:

(U_n) متتالية عددية معرفة على N بحدها العام $U_n = \frac{2}{3^n} - 5n + 1$

1) أثبت أن المتتالية (U_n) متناقصة

2) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

التمرين 15:

استأجر شخص منزلا ابتداءا من 2006/01/01 لمدة ست سنوات، الشخص أمامه اختياران لعقد الإيجار.

- **الاختيار الأول:** يدفع الشخص $18000DA$ مقابل السنة الأولى ويقبل هذا الشخص ارتفاعا سنويا يقدر بـ $1500DA$
- **الاختيار الثاني:** يدفع الشخص $16000DA$ مقابل السنة الأولى ويقبل هذا الشخص ارتفاعا سنويا يقدر بنسبة 5% سنويا من إيجار السنة السابقة.

أذكر مع التعليل الاختيار المناسب

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

حلول التمارين والمشكلات حول الوحدة 2

العموميات:

التمرين 1:

1 قيمة U_0:

❖ **وقفة:**

(* نبدأ بمعرفة الترميز المواقف للحد الأول وهذا بالتعرف على مجموعة تعريف (U_n)

- الترجمة بالرموز للمعطيات اللغوية ترجمة دقيقة)

في هذه الحالة U_0 هو الحد الأول ومنه: $U_0 = 3$

2 إعطاء عبارة U_{n+1} بدلالة U_n

إعطاء عبارة U_{n+1} بدلالة U_n ينتج عن الجملة

" للحصول على كل حد، يختلف عن الحد الأول، من حدود المتتالية (U_n)، نضرب الحد السابق له في (-2) ونضيف 5 إلى الجداء المحصل عليه "

من أجل n من N نجد:

$$U_{n+1} = -2U_n + 5$$

3 حساب كل من: U_1، U_2، U_3، U_4

بالاستفادة من العلاقة الموجودة في الفرع السابق نجد:

- من أجل $n = 0$: $U_1 = -2U_0 + 5$

$$= -2(3) + 5$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

$= -1$

- من أجل $n = 1$: $U_2 = -2U_1 + 5$

$= -2(-1) + 5$

$= 7$

- من أجل $n = 2$: $U_3 = -2U_2 + 5$

$= -2(7) + 5$

$= -9$

- من أجل $n = 3$: $U_4 = -2U_3 + 5$

$= -2(-9) + 5$

$= 23$

التمرين 2:

(U_n) متتالية عددية، معرفة على N^*، بحدها العام $U_n = n + \frac{1}{n}$

1) حساب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (U_n)

❖ **وقفة:**

(الحد الأول للمتتالية لا يعني U_0 في جميع الحالات فلابد أن يتوقف على مجموعة تعريف المتتالية ففي هذه الحالة الحد الأول هو U_1)

- الحد الأول هو: U_1 عندئذ: $U_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$
- الحد الأول هو: U_2 عندئذ: $U_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
- الحد الأول هو: U_3 عندئذ: $U_3 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- الحد الأول هو: U_4 عندئذ: $U_4 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

2) وضع تخمين فيما يخص اتجاه تغير المتتالية (U_n)

من حساب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية

نجد: $U_1 < U_2$ و $U_2 < U_3$ و $U_3 < U_4$

ولذا نقول: يبدو وكأن المتتالية متزايدة

3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) دراسة نظرية

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم

لندرس إشارة الفرق: $U_{n+1} - U_n$

لدينا: $U_{n+1} - U_n = \left((n+1) + \frac{1}{n+1}\right) - \left(n + \frac{1}{n}\right)$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n(n+1) - 1}{n(n+1)}$$

وبما أن: $n \in N^*$ فإن: $n(n+1) > 2$

ومنه: $n(n+1) - 1 > 1$

وعليه: $n(n+1) - 1 > 0$

وبالتالي: $U_{n+1} - U_n > 0$

وهذا يعني أن: $U_{n+1} > U_n$

ومنه المتتالية (U_n) متتالية متزايدة

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 3:

1) حساب الحدود الثلاثة الأولى لكل واحدة من المتتاليات: (U_n)، (ϑ_n)، (W_n)

لدينا: $U_0 = 0$ و $U_1 = 2$ و $U_2 = 6$

ولدينا: $\vartheta_0 = -\frac{2}{3}$ و $\vartheta_1 = -\frac{1}{5}$ و $\vartheta_2 = 0$

ولدينا: $W_0 = 1$ و $W_0 = \frac{2}{3}$ و $W_2 = \frac{7}{11}$

2) دراسة اتجاه تغير كل واحدة من المتتاليات: (U_n)، (ϑ_n)، (W_n)

- المتتالية (U_n) متتالية متزايدة لأنه من أجل كل عنصر n من N

لدينا: $U_{n+1} - U_n = 2n + 2$ و $2n + 2 > 0$

- المتتالية (ϑ_n) متتالية متزايدة لأنه من أجل كل عنصر n من N

لدينا: $\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \frac{7}{(2n+5)(2n+3)}$ و $\frac{7}{(2n+5)(2n+3)} > 0$

- المتتالية (W_n) متتالية متناقصة لأنه من أجل كل عنصر n من N

لدينا: $W_{n+1} - W_n = \frac{-2}{(5n+6)(5n+1)}$ و $\frac{-2}{(5n+6)(5n+1)} < 0$ (U_n)

المتتاليات الحسابية:

التمرين 4:

توضيح الحسابية من المتتاليات الثلاث المعطاة مع التبرير

- $U_n = \frac{n}{2} - 6$

من أجل كل n من N لدينا: U_n تكتب على الشكل:

$U_n = U_0 + n.r$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

حيث: $r=\frac{1}{2}$ و $U_0=-6$

ومنه: (U_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

- $\vartheta_n=n^2+3n$

المتتالية (ϑ_n) ليست حسابية لأنه من أجل n من N، الفرق $\vartheta_{n+1}-\vartheta_n$ ليس ثابتا

إذ: $\vartheta_{n+1}-\vartheta_n=2n+4$

- $\begin{cases}W_0=7\\5W_{n+1}=3-5W_n\end{cases}$ هذه الجملة يمكننا كتابتها على النحو التالي:

$$\begin{cases}W_0=7\\5W_{n+1}=-W_n+\frac{3}{5}\end{cases}$$

وبالتالي لا يوجد عدد حقيقي ثابت r يحقق تعريف المتتالية الحسابية ولذا المتتالية (W_1) ليست حسابية

التمرين 5:

1) إعطاء عبارة الحد العام للمتتالية (U_n)

بالاستفادة من عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية نجد:

من أجل n من N، (N مجموعة تعريف المتتالية (U_n))

$$U_n=-2n+\frac{1}{2}$$

- إعطاء عبارة الحد العام للمتتالية

بالاستفادة من عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية نجد:

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

من أجل n من N^* ، (N^*مجموعة تعريف المتتالية (ϑ_n))

$$\vartheta_n = \frac{1}{4}n - \frac{13}{4}$$

2) حساب مجموع n حدا الأولى للمتتالية (U_n) وهذا بدلالة العدد الطبيعي n و $n \neq 0$

نسمي S_n هذا المجموع، عندئذ:

$$S_n = U_0 + U_2 + \ldots\ldots + U_{n-1}$$

$$= \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$$

$$= \frac{n}{2}\left(-\frac{3}{2} - 2n - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{-n(+2n+3)}{2}$$

- حساب مجموع n حدا الأولى للمتتالية (ϑ_n) وهذا بدلالة العدد الطبيعي n و $n \neq 0$

نسمي S'_n هذا المجموع، عندئذ:

$$S'_n = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots\ldots + \vartheta_n$$

$$= \frac{n}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_n)$$

$$= \frac{n(n-25)}{8}$$

التمرين 6 :

لدينا: (U_n) متتالية حسابية، معرفة على N بحيث:

$U_6 = 5$ و $U_{15} = -40$

1) ايجاد أساس المتتالية (U_n) وحدها الأول:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

❖ **وقفة:**

(في المتتاليات الحسابية إذا أعطي حدان متمايزان فإنه بالإمكان ايجاد الأساس بالاستفادة من عبارة الحد العام مع توظيف هذين الحدين وليست هناك ضرورة لايجاد الحد الأول أولا)

- لدينا: $U_{15} = U_6 + (15-6)r$ حيث r هو أساس المتتالية (U_n)

أي أن: $-40 = 5 + 9r$

ومنه: $r = -5$

- ولدينا: $U_6 = U_0 (6-0)r$

أي أن: $U_0 = U_6 - 6r$

وهذا يعني أن: $U_0 = 5 - 6(-5)$

$= 35$

2) إعطاء عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية (U_n)

ليكن n عنصرا من N

لدينا: $U_n = U_0 + nr$

$= 35 + n(-5)$

$= -5n + 35$

3) لنبحث إن كان (-135) حدا من حدود المتتالية (U_n)

إذا كان (-135) حدا من حدود المتتالية (U_n) فإنه يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث:

$U_{n0} = -135$

الجملة: $U_{n0} = -135$ تعني أن: $-5n_0 + 35 = -135$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

أي أن: $n_0 = 34$

ومنه (-135) حد من حدود المتتالية (U_n) إذ: $U_{34} = -135$

4) حساب مجموع الحدود الخمسة والعشرين الأولى من المتتالية الحسابية (U_n)

نسمي S هذا المجموع، عندئذ:

$$S = U_0 + U_1 + ... + U_{24}$$

❖ **وقفة:**

(أي حد نريد حسابه يكون التعويض في عبارة الحد العام للمتتالية (U_n))

$$= \frac{25}{2}(U_0 + U_{24})$$

$$= \frac{25}{2}(35 + (-85))$$

$$= -625$$

5) ليكن n عددا طبيعيا اكبر من 3

- حساب المجموع S_n حيث: $S_n = U_3 + U_4 + ... + U_n$

عدد الحدود في هذا المجموع هو: $(n-3)+1$ أي: $n-2$

وعليه: $S_n = \frac{n-2}{2}(U_3 + U_n)$

$$= \frac{n-2}{2}(20 + (-5n + 35))$$

$$= \frac{(n-2)(-5n+55)}{2}$$

التمرين 7:

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تعيين ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية بحيث:

مجموع هذه الحدود يساوي 414 وأحد هذه الحدود يساوي 117

نسمي هذه الحدود: a,b,c من اليسار إلى اليمين عندئذ:

- $a+b+c=414$

وبالاستفادة من مبرهنة الوسط الحسابي نجد: $a+c=2b$

ومنه وبالتعويض نجد:

$2b+b=414$

ومنه: $b=138$

- في حالة $a=117$ نجد:

$a+b+c=414$ تعني: $117+138+c=414$

أي أن: $c=159$

وفي حالة $c=117$ نجد:

$a+b+c=414$ تعني $a+138+117=414$

أي أن: $a=159$

ومنه نجد:

($a=117$ و $b=138$ و $c=159$) أو ($a=159$ و $b=138$ و $c=117$)

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

المتتاليات الهندسية:

التمرين 8:

1) الإثبات أن كلا من المتتاليات: (U_n)، (ϑ_n)، (W_n) هندسية

لدينا من أجل كل n من N : $U_n = 3.5^n$

عندئذ: $U_{n+1} = 3.5^{n+1} = 3\times 5^n \times 5 = 5\times U_n$

ومنه المتتالية (U_n) هندسية والعدد الحقيقي الثابت 5 هو أساس المتتالية الهندسية (U_n)

- لدينا من أجل كل n من N : $\vartheta_n = \dfrac{7{,}5^n}{2}$

عندئذ: $\vartheta_{n+1} = \dfrac{7{,}5^n}{2} = \dfrac{7{,}5^n \times 7{,}5}{2} = \dfrac{7{,}5^n}{2}\times 7{,}5$

ومنه: $\vartheta_{+1n} = 7{,}5\times \vartheta_n$

وبالتالي المتتالية (ϑ_n) هندسية والعدد الحقيقي الثابت 7,5 هو أساس المتتالية (ϑ_n)

- لدينا: من أجل كل n من N : $W_n = \dfrac{2}{7^n}$

عندئذ: $W_{n+1} = \dfrac{2}{7^{n+1}} = \dfrac{2}{7^n}\times\dfrac{1}{7}$

ومنه المتتالية (W_n) هندسية والعدد الحقيقي الثابت $\dfrac{1}{7}$ هو أساس المتتالية (W_n)

2) دراسة اتجاه تغير كل واحدة من المتتاليات (U_n)، (ϑ_n)، (W_n)

ليكن n من N :

- لدينا: $U_{n+1} - U_n = 3\times 5^n \times 5 - 3\times 5^n$

$= 3\times 5^n (5-1)$

$= 3\times 5^n \times 4$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

وبما أن: $3\times 5^n \times 4 > 0$ فإن: $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه المتتالية (U_n) متتالية متزايدة

- ولدينا: $\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \frac{7,5^n}{2} \times 7,5 - \frac{7,5^n}{2}$

$$= \frac{7,5^n}{2}(7,5-1)$$

$$= \frac{7,5^n}{2} \times 6,5$$

وبما أن: $\frac{7,5^n}{2} \times 6,5 > 0$ فإن: $\vartheta_{n+1} - \vartheta_n > 0$

ومنه المتتالية (ϑ_n) متتالية متزايدة

- ولدينا: $W_{n+1} - W_n = \frac{2}{7^n} \times \frac{1}{7} - \frac{2}{7^n}$

$$= \frac{2}{7^n}\left(\frac{1}{7}-1\right)$$

$$= \frac{2}{7^n}\left(-\frac{6}{7}\right)$$

وبما أن: $\frac{2}{7^n}\left(-\frac{6}{7}\right) < 0$ فإن: $W_{n+1} - W_n < 0$

ومنه المتتالية (W_n) متناقصة

التمرين 9:

1) إعطاء عبارة الحد العام لكل من المتتاليتين (U_n) و(ϑ_n)

ليكن n عنصرا من N

- لدينا: $U_n = U_1 \times 4^{n-1}$
- ولدينا: $\vartheta_n = \vartheta_0 \times 5^n = \frac{1}{3} \times 5^n$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2) حساب مجموع n حدا الأولى للمتتالية (U_n) من أجل n عدد طبيعي غير معدوم

لدينا: $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$

(S_n المجموع المطلوب) $= U_1 \times \frac{4^n - 1}{4 - 1}$

$= -2 \times \frac{4^n - 1}{3}$

$= -\frac{2}{3}(4^n - 1)$

- حساب مجموع n حدا الأولى للمتتالية (ϑ_n) من أجل n عدد طبيعي غير معدوم

لدينا: $S'_n = \vartheta_0 + \vartheta_1 + ... + \vartheta_{n-1}$

(S_n المجموع المطلوب) $= \vartheta_0 \times \frac{5^n - 1}{5 - 1}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{5^n - 1}{4}$

$= \frac{1}{12}(5^n - 1)$

التمرين 10:

لدينا (U_n) هندسية، معرفة على N، وجميع حدودها موجبة حيث:

$U_3 \times U_5 = 2304$ و $3U_3 - U_4 = 24$

1) إيجاد U_4 ثم U_3 ثم q أساس المتتالية الهندسية (U_n)

- لدينا: U_4 وسط هندسي للعددين: U_3 و U_5

وعليه: $U_3 \times U_5 = U_4^2$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

وبالاستفادة من المساواة: $U_3 \times U_5 = 2304$

نجد: $U_4{}^2 = 2304$

أي أن: $U_4 = 48$ أو $U_4 = -48$

وبما أن جميع حدود المتتالية (U_n) موجبة فإن: $U_4 = 48$

- وبالاستفادة من المساواة: $3U_3 - U_4 = 24$

نجد: $3U_3 = U_4 + 24$

أي أن: $U_3 = 24$

- ولدينا من تعويض المتتالية الهندسية:

$$U_4 = U_3 \times q$$

أي أن: $q = \dfrac{U_4}{U_3}$

وهذا يعني أن: $q = 2$

(2) إعطاء عبارة الحد العام للمتتالية (U_n)

ليكن n عددا طبيعيا، عندئذ:

$$U_n = U_3 \times q^{n-3} = 24 \times 2^{n-3} = 24 \times \frac{2^n}{23}$$

ومنه: $U_n = 3 \times 2^n$

(3) حساب المجموع S_n بدلالة العدد الطبيعي n

لدينا: $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{2n+1}$

S_n هو مجموع $(2n+2)$ حدا الأولى للمتتالية (U_n)

ومنه: $S_n = U_0 \times \dfrac{q^{2n+2} - 1}{q - 1}$

ولكن: $U_3 = U_0 \times q^3$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أي أن: $24 = U_0 \times 2^3$

ومنه: $U_0 = 3$

وبالتالي: $S_n = 3 \times \frac{2^{2n+2}}{2-1} = 3\left(2^{2n+2} - 1\right)$

التمرين 11:

1) البحث عن إمكانية وجود x

الجملة 5-، x، 10 في هذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية

تعني أن: $x^2 = 10 \times (-5)$ (حسب مبرهنة الوسط الهندسي)

أي أن: $x^2 = -50$

وهذه الأخيرة قضية خاطئة

ومنه لا توجد قيم لـ x تحقق المطلوب

2) تعيين قيم العدد الحقيقي x بحيث الأعداد 2، x، $\frac{8}{3}$ في هذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية.

الأعداد 2، x، $\frac{8}{3}$ في هذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية.

تعني أن: $x^2 = 2 \times \frac{8}{3}$ (حسب مبرهنة الوسط الهندسي) .

أي أن: $x^2 = \frac{16}{3}$

وهذا يعني أن: $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ أو $x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي: $\left\{\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right\}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 12:

ليكن x عددا حقيقيا

1) إعطاء عبارة أخرى للمجموع $A(x)$ مع الفرض أن $x \neq 1$

(بالاستفادة من مجموع حدود لمتتالية هندسية)

$$A(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

2) إعطاء عبارة أخرى للمجموع $B(x)$ مع الفرض أن: $x \neq -1$

(بالاستفادة من مجموع حدود لمتتالية هندسية)

$$B(x) = x^3 \times \frac{1 - (-x)^7}{1 + x}$$

التمرين 13:

❖ **وقفة:**

(أهم ما في هذا النوع من التمارين هو الترجمة السلمية للمقدمة اللغوية المتعلقة بالتمرين إلى عبارات رياضية)

1) الإثبات أن (Q_n) متتالية هندسية

ليكن n عددا طبيعيا

من المعلومة المعطاة عن سكان المدينة A نجد أن:

$$Q_{n+5} = Q_n - \frac{5}{100} Q_n$$

$$= \frac{95}{100} Q_n$$

ومنه المتتالية (Q_n) هندسية أساسها q_1 حيث: $q_1 = \frac{95}{100}$

- الاثبات ان (b_n) متتالية هندسية

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ليكن n عددا طبيعيا

بترجمة المعلومة المعطاة من سكان المدينة B نجد أن:

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{100} b_n$$

$$= \frac{101}{100} b_n$$

ومنه المتتالية (b_n) هندسية أساسها q_2 نجد: $q_2 = \frac{101}{100}$

2 إعطاء عبارة الحد العام لكل من المتتاليتين (a_n) و (b_n)

ليكن n عددا طبيعيا

- لدينا: $a_0 = 400000$

$$a_n = a_0 \times q_1^n = 400000\left(\frac{95}{100}\right)^n$$

ولدينا: $b_0 = 350000$ عندئذ:

$$b_n = b_0 \times q_2^n = 350000\left(\frac{101}{100}\right)^n$$

3 البحث عن السنة التي يكون في جانفي منها، عدد سكان المدينة B أكبر من عدد سكان المدينة A لأول مرة:

ليكن n عددا طبيعيا

لنبحث عن أصغر قيمة لـ n تحقق: $b_n > a_n$

$b_n > a_n$ تعني أن: $350000\left(\frac{101}{100}\right)^n > 400000\left(\frac{95}{100}\right)^n$

أي أن: $7(101)^n > 8(95)^n$

وهذا يعني أن: $\left(\frac{101}{95}\right)^n > \frac{8}{7}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

المتتالية المعرفة بحدها العام: $\left(\frac{101}{95}\right)^n$ متزايدة و3 هي أول قيمة لـ n

تحقق: $\left(\frac{101}{95}\right)^n > \frac{8}{7}$

ولذا أول جانفي من سنة: $3+1989$ أي: 1992

يكون عدد سكان المدينة المدينة B أكبر من عدد سكان المدينة A لأول مرة.

متتاليات حسابية ومتتاليات هندسية:

التمرين 14:

ليكن n عنصرا من N

1) الاثبات أن المتتالية (U_n) متناقصة

لدينا: $U_{n+1}-U_n = -\frac{2}{3^n}\times\frac{2}{3}-5$

$= -\frac{4}{3^{n+1}}-5$

وبما أن: $-\frac{4}{3^{n+1}}-5<0$ فإن: $U_{n+1}-U_n<0$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة

2) حساب المجموع S_n بدلالة العدد الطبيعي n

❖ **وقفة:**

(وفي مجموع كهذا، المتتالية (U_n) تكون حسابية وليست هندسية إلا أنها مجموع متتاليتين إحداهما هندسية والأخرى حسابية)

لذا: $S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots + U_n$

$= \left(\frac{2}{30}+\frac{2}{31}+\ldots..+\frac{2}{3^n}\right)+\left(\left(-5(0)+1\right)+\left(-5(1)+1\right)+\ldots+\left(-5n+1\right)\right)$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$$= 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{n+1}{2}(1-5n+1)$$

$$= 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(-5n)}{2}$$

التمرين 15:

في هذا التمرين حاول أن تربط الاختيار الأول بالمتتاليات الحسابية وأن تربط الاختيار الثاني بالمتتاليات الهندسية.

ثم استعمل الحد العام لكل من المتتاليتين.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©